

**\* 专题评述 \***

# 强流质子束在周期聚焦通道中束晕-混沌运动的物理机制及其非线性控制策略\*

方锦清<sup>1</sup> 陈关荣<sup>2</sup> 周刘来<sup>1</sup> 黄继杰<sup>1</sup>

1. 中国原子能科学研究院,北京 102413; 2. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Houston, TX77204-4793, USA

**摘要** 实践表明矩阵传输理论及定性方法是分析强流质子束在周期聚焦磁场通道中束晕-混沌运动的产生机制,通过多粒子数值模拟(PIC)进一步揭示,不仅是质子束空间电荷的非线性效应,而且束核与粒子之间相互作用导致横向能量交换及非线性共振覆盖形成随机区域的扩散,产生了特有的束晕-混沌复杂运动。为此,提出采用非线性反馈控制策略,产生反作用力去抵消粒子的横向散焦效应和扩散。通过PIC研究证实了该法对抑制束晕-混沌的有效性。同时讨论了实验的可能性。

**关键词** 强流质子束 矩阵传输理论 束晕与混沌 多粒子数值模拟 非线性控制

强流离子束有着十分诱人的应用发展前景,在核材料生产与增殖(例如氙、将<sup>232</sup>Th 转化为<sup>233</sup>U 等)、放射性废物嬗变、放射性药物生产及重离子聚变等方面都有突出优势,特别是1993年诺贝尔奖获得者 Rubbia 领导的西欧核子中心(CERN)一个小组提出关于能量放大器获得干净核能的新设想<sup>[1]</sup>,即现在称为强流加速器驱动的放射性洁净核能系统,它可以克服常规核电的弊端,构成了新的更安全、更干净、更便宜的洁净核能系统,但是对加速器的要求比现有的加速器超过数十至上百倍。例如它对强流中能质子加速器,质子流高达10~250 mA,能量在0.8~1.8 GeV,束损率必须小于 $10^{-5} \sim 10^{-8}/\text{m}$ 。因此,强流加速器中的束晕-混沌现象是极其关键的问题之一<sup>[2~10]</sup>。为了提出一套有效设计新型强流加速器的方法,不仅必须深入研究这类束晕-混沌的特性及其产生的物理机制,而且需要研究对束晕-混沌的控制策略及如何实现的技术。这是国际上该领域正在研究中的一个极富挑战性的前沿热点课题<sup>[7~10]</sup>。

由于束晕-混沌是一种复杂的湍流运动,涉及时空混沌问题,尽管混沌控制已有很多工作<sup>[11~17]</sup>,但迄今国际上尚未报道控制束晕-混沌现象。我们从混沌控制的策略出发,提出了非线性反馈控制方法,实现了对束晕-混沌的抑制和初步控制。

本文首先对强流质子在周期聚焦磁场通道(PFC)中的运动,考虑了强流质子的空间电荷效应,应用矩阵传输理论及定性分析方法分别进行了简单的理论分析后,提出了非线性反馈离

2000-03-01 收稿,2000-05-30 收修改稿

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号:19875080)

散控制方法. 在此基础上, 利用多粒子模拟(PIC)方法, 进行数值研究. 结果证实了非线性反馈控制方法对束晕-混沌控制的有效性. 它对进一步开展该课题的研究和实验及设计工作均有一定的指导意义.

## 1 强流束矩阵传输理论分析束晕-混沌的物理机制

迄今, 国外对强流带电粒子束产生的束晕-混沌的物理机制尚未完全弄清楚<sup>[10]</sup>. 我们从以往的研究知道, 强流离子束的一级矩阵传输理论可以给出强流束本身产生的空间电荷效应和薄透镜的边缘场效应的简单物理图象<sup>[18]</sup>. 类似地, 我们也可以采用适当修正的矩阵传输理论来分析质子束在非线性周期场中产生的束晕现象的物理图象<sup>[19-21]</sup>.

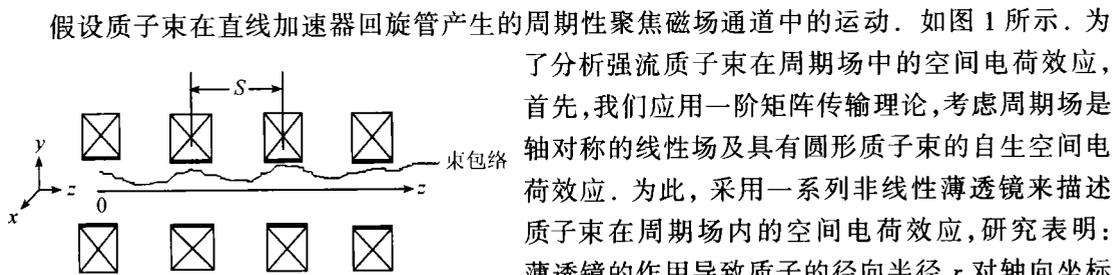


图 1 质子束在周期聚焦通道中的运动示意图

为了分析强流质子束在周期场中的空间电荷效应, 首先, 我们应用一阶矩阵传输理论, 考虑周期场是轴对称的线性场及具有圆形质子束的自生空间电荷效应. 为此, 采用一系列非线性薄透镜来描述质子束在周期场内的空间电荷效应, 研究表明: 薄透镜的作用导致质子的径向半径  $r$  对轴向坐标的导数  $r'$  的增量  $\Delta r'$  为:  $\Delta r' = wr/R^2$ , 对于  $r \ll R$ ;  $\Delta r' = wr/R$ , 对于  $r \gg R$ . 其中  $R$  是束半径,  $w$  为

与质子速度和束流强度有关量. 可以求得这个量的增长满足下列关系

$$w = 2\epsilon [\cos(\sigma/2) - \cos(\sigma_0/2)] / \sin(\sigma/2), \quad (1)$$

此处  $\sigma$  为考虑质子束的空间电荷效应时一个周期  $r \ll R$  处的真空相移,  $\epsilon$  为质子束的发射度. 显然, 由于空间电荷的非线性效应, 如果  $\sigma_0 > 90^\circ$ , 而  $\sigma < 90^\circ$ , 则必出现  $w > 0$  情形, 于是质子束便产生径向发散, 即导致束晕现象. 已有研究揭示<sup>[2-10, 20-22]</sup>: 由于  $\sigma_0 > \sigma$ , 而当相移  $\sigma$  为  $90^\circ$  时产生了粒子非线性共振, 从而导致质子束高度不稳定性. 因为粒子振幅对振动频率的依赖性, 产生了严重的“相”混合, 并存在一些具有最大振幅的粒子. 非线性共振导致核心内的粒子散射, 共振覆盖进一步导致混沌. 混沌一旦发生, 束晕便大大地增强了. 因为共振覆盖形成随机区域, 以及在随机区域的扩散(如 Arnold 网等)增强了粒子的再分布. 这说明束晕主要来自混沌区域内的粒子扩散(例如 Arnold 扩散). 混沌加剧了束晕现象, 过程错综复杂, 于是产生了强流加速器中所特有的束晕-混沌现象.

鉴于束晕-混沌运动极端的复杂性, 比任何一种混沌运动更难控制. 于是先提出一个问题: 如何部分抵消上述空间电荷效应及减少共振覆盖, 而使得束晕-混沌的幅度被抑制? 从上述矩阵传输理论得知, 既然空间电荷效应引起束发散主要是与  $\sin(\sigma/2)$  和  $\cos(\sigma/2)$  两项有关, 这样我们自然想到能否用一种具有类似于正弦或余弦的非线性反馈函数去控制和抵消空间电荷效应. 这一简单判断可从下节定性理论分析再次得到确认.

## 2 束晕-混沌可控性的定性分析

一束具有圆形的质子束在直线加速器回旋管产生的周期性聚焦磁场通道中的运动, 当质子束满足 Kapchinsky-Vladimirsky (K-V) 分布时, 质子束水平方向运动的无量纲包络方程

为<sup>[1-3]</sup>

$$\frac{d^2 r_b}{ds^2} + k_z(S) r_b - \frac{k}{r_b} - \frac{1}{r_b^3} = 0, \quad (2)$$

其中  $r_b$  为束的无量纲半径,  $s = z/\beta_b ct = z/S$  是轴向  $Z$  无量纲坐标,  $\beta_b$  是束粒子的平均轴向运动速度,  $c$  为光速, 周期函数  $k_z(S) = k_z(s + S) = 2q^2 B_z^2 / 4\gamma_b^2 \beta_b^2 m^2 c^2$  是表征一个周期聚焦通道的聚焦强度,  $\gamma_b = (1 - \beta_b)^{-1/2}$ ,  $S$  为一个 PFC 的周期长度, 本文只讨论质子速度和周期长度不变的情形.  $B_z(s) = B_z(0)$  是轴向磁场,  $q$  和  $m$  分别为粒子的电量和静止质量. 在这种周期场中一个轴向周期内的真空相移  $\sigma_0 = [\eta S^2 k_z(0)]^{1/2}$ ,  $\eta$  为调谐衰减系统, 归一化束流导流系数  $k = 2q^2 N_b / \gamma_b^3 \beta_b^2 m c^3$  是束自生场强度的一种测度,  $N_b$  为每单位束的轴向长度上的粒子数目.

我们仍然假设周期外场和质子束都是轴对称的, 且质子速度和周期长度不变. 现在目的就是要抑制质子束的径向发散, 为此, 令  $-gu$  为欲加的非线性反馈控制函数, 并设计为信号差的正弦函数或二次方等非线性函数形式. 简化的条件是: 令  $\bar{k}_z$  为方程(1)中周期函数  $k_z(S)$  的平均值, 则受控系统可写成

$$\frac{d^2 r_b}{ds^2} + \bar{k}_z r_b - \frac{k}{r_b} - \frac{1}{r_b^3} = -gu, \quad (3)$$

为了能对受控方程(4)给出可控性的概念, 在方程(4)的两边加上相同的常数  $\alpha$ , 并将方程改写为

$$\frac{d^2 r_b}{ds^2} + \bar{k}_z r_b + \alpha = \alpha - gu + \frac{k}{r_b} + \frac{1}{r_b^3}, \quad (4)$$

可以这样来选择常数  $\alpha$ , 使得左边具有常数的线性微分方程是稳定的. 不难验证: 如果选择常数  $\alpha > \bar{k}_z^2/4$ , 则左边线性微分方程是稳定的, 因为它的两个特征值都是负实部. 为了确保整个受控方程(4)是稳定的, 根据 Poincare-Lyapunov 定理<sup>[19]</sup>, 方程中的非线性部分必需满足以下条件

$$\lim_{\|r_b\| \rightarrow 0} \frac{\left\| \alpha - gu + \frac{k}{r_b} + \frac{1}{r_b^3} \right\|}{\|r_b\|} = 0, \quad (5)$$

由此式可见: 应用线性控制器形式即  $u = u(r_b) = ar_b + b$  是不能满足(5)式条件的. 因此, 要使(5)式成立, 即达到所期望的控制, 应用非线性控制器是一个必要条件. 显然, 最简单的光滑的非线性控制器形式就是与  $r_b^2$ ,  $r_b^3$  和  $\sin(r_b)$  有关的形式了. 这一结果从理论上提供了设计非线性反馈控制器的定性理论依据. 说明采用非线性反馈函数才能实现  $r_b \rightarrow 0$ . 事实上, 采用非线性幂函数和正弦函数进行反馈控制, 束晕-混沌的幅度即可被大大减少. 下面的数值模拟结果证实了这个分析论断.

应当再次指出: 上述的分析仅仅是一种简单的定性分析, 但是它简单明了地提供了利用非线性反馈函数进行束晕-混沌控制的必要性和可能性, 为我们阐明了以下进行数值模拟的物理图象和理论依据. 由于控制束晕-混沌现象的数学物理问题的极端复杂性, 要精确地进行一般的理论分析是十分困难的, 有待进一步研究.

### 3 束晕-混沌形成机制的数值模拟

我们根据强流离子束在电磁场中运动所遵循的基本方程及其数值模拟方法<sup>[14]</sup>, 编制了 PIC 模拟程序, 进行了四维相空间数值模拟研究.

质子束空间电荷的自生场满足 Poisson 电位方程

$$\nabla^2 \phi(r, z) = -\frac{q}{\epsilon_0} \iint f(r, r_{\perp}; z) dr_{\perp}, \quad (6)$$

这里  $f$  为在非相对论的四维相空间内的横向分布函数, 它可以通过 PIC 程序进行数值模拟求出,  $\epsilon_0$  为真空介电常数,  $\phi$  为电位.

质子运动既受到周期外场的作用, 又受到质子束的空间电荷自生场作用, 质子径向所受的自生场作用力为

$$F_r = -q \nabla \phi(r, z). \quad (7)$$

我们应用 PIC 程序, 首先在没有控制的条件下对质子运动进行了大量模拟计算, 在模拟中采用 50000 粒子, 它们的起始条件遵循 Gauss 分布形式, 主要的参数如下:  $\eta = 0.8$ , 失匹配因子  $M = 2$ ,  $\sigma_0 = 115^\circ$ , 于是可算得束匹配半径  $a_m = 0.7891642$  及导流系数  $k = 0.903079$ .

从上述矩阵传输理论已知, 如果  $\sigma_0 > 90^\circ$ , 而  $\sigma < 90^\circ$ , 则质子运动在径向必出现严重的发散, 即产生束晕. 下面的四维数值模拟研究证实了这点.

图 2(a) 示出无控制下在不同  $P = 600$  和 1200 截面上的粒子分布. 从图 2(a) 明显看到: 经过若干周期数目  $P$  后出现了束晕-混沌现象, 而且随着轴向周期数目的增加, 束晕-混沌越来越严重, 越来越多的束核内的粒子逃逸到核心外围, 从而形成了明显的晕圈(斑), 而且粒子的散射范围(半径)越来越大, 当束流在周期数  $P = 1200$  处, 其最大半径与初始最大半径之比已超过了 6 倍之多了, 如此行进, 束流最终必然打到加速器的管壁上, 从而造成严重的放射性剂量超标, 这是强流粒子束应用中, 特别是在加速器驱动的洁净核能系统中所不允许的. 因为它会对加速器环境和人身造成严重的危害, 正是这种明显的原因, 促使人们提出必须设法抑制和控制束晕-混沌现象, 以确保强流加速器的安全而高效地运行和人身安全.

仔细观察图 2(b) 给出相应于图 1 的不同周期截面上无控制时的粒子相图, 可以发现: 初始粒子的横向速度很小(不超过 1), 但是随着轴向周期数目的增加, 粒子横向的散射速度越来越大, 在  $P = 600$  以后已接近于 10, 这个事实表明: 粒子与束核之间的相互作用导致能量的横向交换越来越显著, 核内粒子数目逃逸到核心之外激烈地增加, 形成束晕-混沌的范围必然随之增大. 在周期数  $P = 600$  的截面上, 相图出现两翼向外旋转的姿势, 当运动到  $P = 900$  处相图旋转了  $90^\circ$ , 而在  $P = 1200$  处相图再次旋转  $90^\circ$ , 而且束晕-混沌的范围更加严重了, 相图出现这种十分有趣的旋转结构说明: 形成束晕-混沌是一个复杂运动过程, 它不仅与空间电荷的非线性效应有关, 而且与其内部粒子同束核的能量交换有关, 那些横向速度较大的粒子从核心内逃逸出去, 这显然与场对粒子的作用力及失匹配等因素相关联, 由此启迪我们必须通过一条有效的途径来抑制和控制那些向外逃逸粒子的受力方向, 或设法尽量减少横向的粒子速度和能量, 从而才能达到抑制和控制束晕-混沌的目的.

### 4 束晕-混沌的非线性反馈控制

根据上述分析, 将非线性反馈控制器  $G$  加到方程(7)的右边, 则有

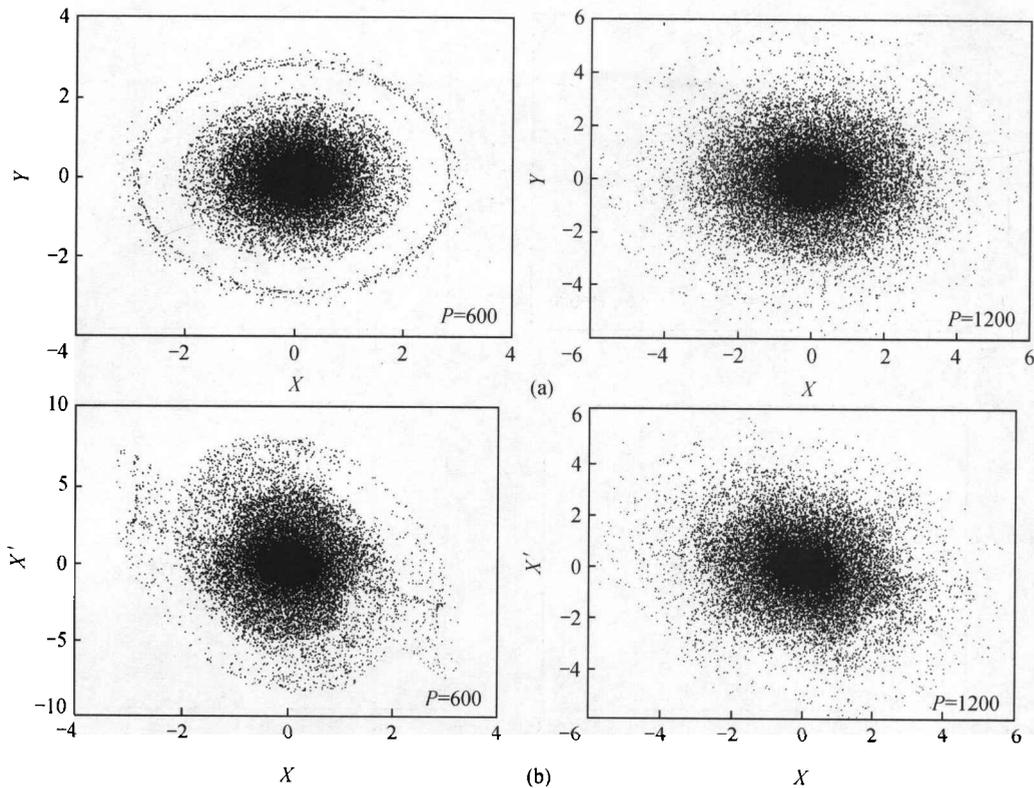


图 2 无控制时,在  $P=600$  和  $1200$  截面上粒子分布(a)及相图(b)

$$F_r = -q \nabla \phi(r, z) + G, \tag{8}$$

如上分析表明,  $G$  若是线性反馈函数,则无法达到对束晕-混沌的有效控制.

迄今构造(设计)非线性反馈函数尚缺乏一般的普遍方法,除了标准的 Lyapunov 函数方法,开关流形方法及尝试法等等<sup>[11-17]</sup>之外,我们采用了下列一些典型的非线性反馈函数:

$$\begin{cases} G = -g \sin(r_{\max} - a_m), & G = -g \sin(r_{\max} - a_0), & G = -g(r_{\max} - a_m)^2 \\ G = -g \sin(r_{\max} - a_0), & G = -g \sin(r_{\text{rms}} - a_m), & G = -g(r_{\text{rms}} - a_m)^2 \\ G = g[f_{ab} r_{\text{rms}} - f_{ab}(a_m)], & f_{ab}(x) = -\frac{2}{a} \left[ 1 - \frac{2}{a} x^2 \right] \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \end{cases} \tag{9}$$

其中,  $g$  为控制增益;  $r_{\max}, r_{\text{rms}}$  分别为最大粒子半径和全体粒子的均方根半径;  $a_0, a_m$  分别为在实空间内“呼吸”振荡的最小幅度和束流的匹配半径. 在适当的增益下,上述非线性反馈控制均能有效控制束晕-混沌的,特别是(9)中的第三式是一种小波反馈函数形式,由于它具有很强的非线性和良好的局域特性,更能使束流损失和放射性剂量明显地减少至最小程度,达到理想的控制效果<sup>[23]</sup>.

作为一个典型的实例,我们用  $G = -0.15 \sin(r_{\max} - a_m)$ ,每隔 5 个周期离散地反馈到轴向聚焦磁场通道上,与图 2 相比较,图 3 分别示出了在非线性反馈控制下相应的周期截面上的粒子分布和相图演化,从图 3(a)看到:由于有了非线性控制,束晕-混沌得到了有效的抑制和控制,最明显的效果是束晕-混沌的范围大大缩小,粒子分布变得比较均匀. 从图 3(b)与图 2(b)

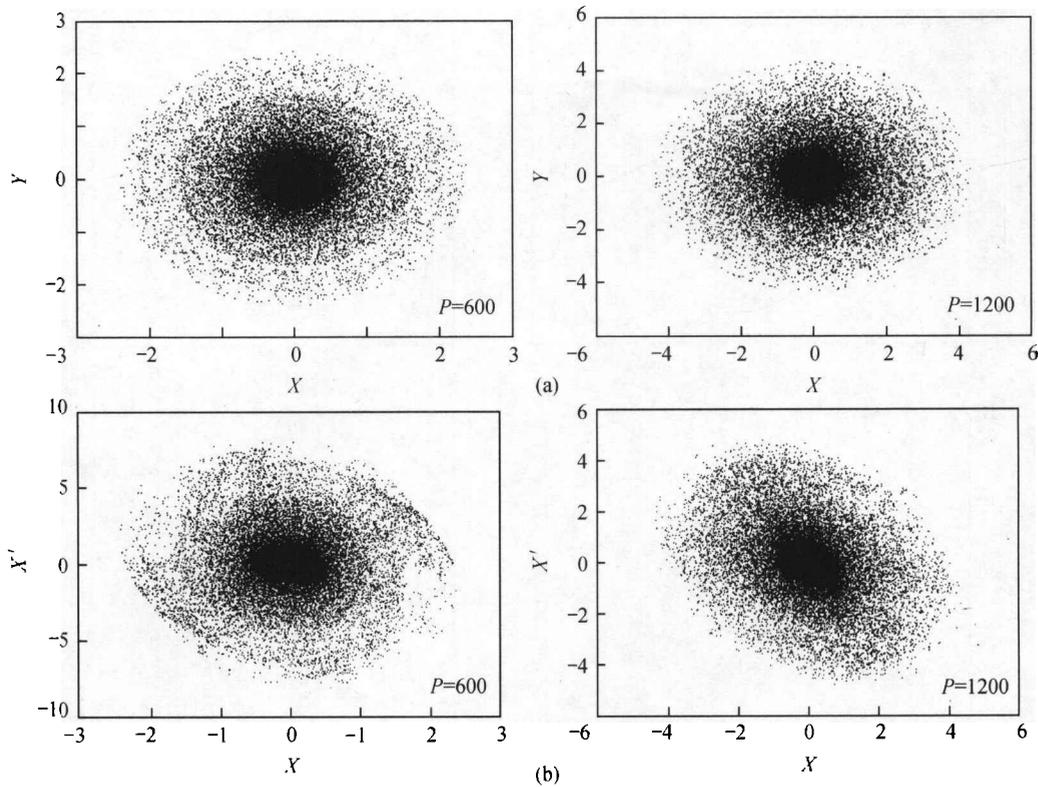


图 3 非线性控制后,在  $P = 600$  和  $1200$  截面上粒子分布(a)和相图 (b)

比较可见:  $P = 600$  处的相图经控制后原来两臂旋转的翅膀明显的被压缩了或大部分被“切除”了. 由于非线性反馈离散控制作用,相图在 PFC 为 600 和 1200 处束晕-混沌的范围得到有效的控制,与无控制时相比在 1200 处的面积范围减少一半多,随着质子行进的聚焦周期数目  $P$  的增加,没有出现束晕-混沌的再生现象,束晕-混沌分布的均匀性都得到了明显的改善. 其原因就在于质子在径向所受的空间电荷力被外部非线性控制力大大地抵消了.

同时,作为束晕-混沌控制的一种测度定义一个束晕强度因子  $H$  为在  $r_b = 1.75r_b(0)$  以外的粒子数目与参与模拟的所有粒子之比,显然  $H$  越小,控制效果越好;反之则越差. 应用上述非线性反馈控制器,可以减小束晕强度因子  $H$ ,例如,应用  $G = -0.15(r_{\max} - a_m)^2$  每隔 5 个周期数反馈到周期聚焦通道后,在经过 1200 周期处,  $H = 0.1078$ . 而无控时  $H > 0.2$ . 又如应用 (9) 式中小波函数反馈形式,取  $g = -9.5$ ,  $a = 2.8$ ,进行连续反馈控制后  $H = 0$  达到了理想的控制效果.

上述控制结果表明:该法对抑制束晕-混沌是可行的和十分有效的,只要进一步寻求最佳的增益因子和分散控制的周期数目,就可能利用最小的代价获得对束晕-混沌最佳的控制效果.

## 5 讨论与结论

本文应用矩阵传输理论及定性分析方法,分析了强流质子束在周期聚焦磁场通道中产生的束晕-混沌的物理机制,粒子分布和相图演化图的旋转结构,说明形成束晕-混沌是一个复杂

运动过程,它不仅与空间电荷的非线性效应有关,而且与其内部粒子同束核的能量交换及共振覆盖关联,那些横向速度较大的粒子从核心内逃逸出去,与束核相互作用,导致了束晕-混沌运动.为此,我们提出了非线性反馈控制方法,通过PIC数值模拟,证实了该法抑制束晕-混沌的有效性.该法可以在实验室加以验证,例如,应用外部射频周期场分散地每隔若干周期注入到加速器聚焦磁场通道中,通过适当调整参数,即可检验控制效果,其中小波函数法已有坚实的实验技术,更能在实验中加以改进和完善.

值得指出,迄今国内外关于束晕-混沌产生的物理机制的研究,都是从一种经典方法出发考察分析问题,把问题完全归结为束流失匹配  $M$  所造成的影响,实际上各种影响因素不能笼统地反映在一个综合因子  $M$  上,必须考虑粒子与束核相互作用的全过程的实际影响.最近美国 Maryland 大学有人从微观层次上考虑带电粒子束内的 Coulomb 碰撞(散射)效应的影响<sup>[8]</sup>,但从一般概念上说 Coulomb 碰撞(散射)效应并不重要,这还需要进一步研究.

我们认为,束晕-混沌的产生可能有更内在的根源,应该进一步从微观层次考察物理机制问题,特别是量子混沌很值得关注.加速器中带电粒子在外部磁场中的运动可能导致量子混沌.例如,如果把外部电磁场干扰视为一个单色波,上述加速器中的问题就可用一带电粒子在外部横向磁场下与单色波相互作用的运动来描述,类似于研究一个被微扰的简并系统中的弱混沌问题.因此,应当将对束晕-混沌产生的物理机制的研究,从宏观层次推进到微观层次,研究更多影响因素,深入探索新机制,制定新的控制对策和技术路线,以期从根本上揭示强流中能加速器中的粒子束晕-混沌特性,提出控制束晕-混沌的新方法和新技术,从而解决强流离子束应用,尤其是放射性洁净核能系统中的关键问题.

## 参 考 文 献

- 1 Carminati F, et al. An energy amplifier for cleaner and inexhaustible nuclear energy production driven by a particle beam accelerator, CERN/AT/93-47(ET), 1993
- 2 Gluckstern R L. Analytic model for halo formation in high current ion Linacs. *Phys Rev Lett*, 1994, 73: 1247
- 3 Gluckstern R L, et al. Halo formation in three-dimensional bunches. *Phys Rev E*, 1998, 58: 4977
- 4 Chen C, et al. Nonlinear resonances and chaotic behaviour in a periodic focused intense charged-particle beam. *Phys Rev Lett*, 1994, 72: 2195
- 5 Fink Y, et al. Halo formation and chaos in root-mean-square matched beams propagating through a periodic solenoidal focusing channel. *Phys Rev E*, 1997, 55: 7557
- 6 Lagniel J M. On halo formation from space-charge dominated beams. *Nucl Instrum and Methods in Phys Rev A*, 1994, 345: 46
- 7 Fedotov A V, et al. Halo formation in three-dimensional bunches with various phase space distributions. *Phys Rev ST Accel Beam*, 1999, 2: 014201
- 8 Gluckstern R L, et al. Coulomb scattering within a spherical beam bunch in a high current linear accelerator. *Phys Rev ST Accel Beam*, 1999, 2: 054201
- 9 Wang F T S. Particle-core study of halo dynamics in period-focusing channels. *Phys Rev E*, 1999, 61: 855
- 10 方锦清. 强流加速器驱动的洁净核能系统中的一个关键问题. *自然杂志*, 2000, 2: 63
- 11 Chen G, et al. *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications*. Singapore: World Scientific Pub. Co., 1998
- 12 方锦清. 非线性系统中的混沌控制与同步及其应用前景(一). *物理学进展*, 1996, 16: 1
- 13 方锦清. 非线性系统中的混沌控制与同步及其应用前景(二). *物理学进展*, 1996, 16: 137
- 14 Fang J Q, et al. Nonlinear feedback control of spatiotemporal chaos in coupled map lattices. *Discrete Dynamics in Nature and Society*,

- 1998, 1: 283
- 15 Fang J Q, et al. Control and synchronization of spatiotemporal chaos. In: Chen G (ed.), Control of Bifurcation and Chaos in Engineering Systems, New York: CRC Press, 1999, 107 ~ 130
  - 16 Fang J Q, et al. Switching manifold approach to chaos synchronization. Phys Rev E, 1999, 59: R2523
  - 17 Ali M K, et al. Synchronization of chaos and hyperchaos using linear and nonlinear feedback function. Phys Rev E, 1997, 55: 5285
  - 18 方锦清. 低能强流离子束在加速-减速系统中的一种分析方法. 科学通报, 1981, 19: 1164
  - 19 Verhust F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 1996, 83 ~ 85
  - 20 郁庆长. 带电粒子束在非线形周期场中的传输. 高能物理与核物理, 1993, 17: 305
  - 21 Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. New York: John Wiley and Sons, 1994
  - 22 方锦清, 等. 强流离子光学的数值模拟. 原子核物理, 1981, 3: 267
  - 23 方锦清, 等. 小波函数反馈法控制束晕-混沌. 自然杂志, 2000, 22: 376